

Aufgaben zur Übung

- 1) Es sei p eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl und $M_p = \{1, 11, 111, \dots, \underbrace{11 \dots 11}_{p\text{-mal } 1}\}$

Zeige, dass es in M_p stets eine Zahl (eine sog. „*Repunit*“) gibt, die durch p teilbar ist.

- 2) In einem dunklen Speicher eines Schuhgeschäfts liegen, durcheinandergeworfen 10 Paar gleichartige Schuhe gleicher Größe, und zwar je 5 schwarze und 5 weiße Paare.

Jemand holt völlig zufällig einige Schuhe aus dem Lager (ohne dabei das Licht im Speicher einzuschalten). Wie viele Schuhe muss er mitnehmen, um sicher ein farblich passendes Paar zu erwischen?

- 3) Auf einer 1 m x 1 m großen quadratischen Tischplatte sitzen 151 Fliegen.

Zeige, dass das tapfere Schneiderlein mit einer kreisförmigen Fliegenklatsche vom Radius 15 cm (mindestens) tatsächlich sieben Fliegen auf einen Streich erschlagen kann – vorausgesetzt, dass er die richtige Stelle aussucht und schnell genug ist.

- 4) **Ramsey Problem:** Zeige, dass es unter 6 Personen immer 3 geben muss, die einander kennen oder nicht kennen. (Die beiden Möglichkeiten schließen einander nicht aus.)

- 5) In einem Koordinatensystem werden 47 Punkte markiert, deren Koordinaten ganzzahlig sind und für die $1 \leq x \leq 20$ und $1 \leq y \leq 5$ gilt.

Zeige, dass man unter den markierten Punkten stets vier finden kann, die ein Rechteck bilden, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Tipp: Man kann das Schubfachprinzip auch mehrmals hintereinander anwenden.

- 6) Wir betrachten ein rechtwinkeliges Koordinatensystem in der Ebene. Ein Punkt P heißt Gitterpunkt, wenn seine Koordinaten in diesem Koordinatensystem positiv ganzzahlig sind.

Zeige, dass es unter fünf Gitterpunkten stets zwei gibt, deren Mittelpunkt ebenfalls ein Gitterpunkt ist.

Tipp: Zeige zuerst: Sind $P = (p_1, p_2)$ und $Q = (q_1, q_2)$ zwei Punkte mit positiven ganzzahligen Koordinaten, dann ist $\left(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}\right)$ der Mittelpunkt der Strecke PQ .

Aufgaben zur Übung – Lösungen

- 1) Wie bei der vorigen Aufgabe zeigen wir die gewünschte Aussage durch einen indirekten Beweis, und nehmen dazu wieder an, dass keine der Zahlen aus M_p durch p teilbar sei.

Damit können bei der Division durch p nur die $p - 1$ Reste $1, 2, 3, \dots, p - 1$ auftreten. Wieder kann man die Zahlen von M_p nach ihren Resten klassifizieren und erhält so $p - 1$ Schubfächer (Klassen) und p Zahlen, die man auf diese Fächer aufteilen kann.

Nach dem Schubfachprinzip muss es also mindestens zwei Repunits z_1 und z_2 aus M_p geben, die bei der Division durch p den gleichen Rest liefern.

O.b.d.A. gelte $z_1 > z_2$.

Für diese Zahlen gilt: $z_1 = n \cdot p + r$ und $z_2 = m \cdot p + r$ für gewisse $n, m \in \mathbb{N}$ und daher auch:

$$p \mid z_1 - z_2 = p \cdot (n - m)$$

Was kann man nun noch über die Differenz zweier solcher Repunits aussagen?

$$z_1 = \underbrace{11 \dots 1}_{s \text{ mal}} \text{ und } z_2 = \underbrace{11 \dots 1}_{t \text{ mal}} \text{ wobei } s > t$$

$$\text{Damit: } z_1 - z_2 = \underbrace{11 \dots 1}_{s-t \text{ mal}} \underbrace{00 \dots 0}_{t \text{ mal}} = 11 \dots 1 \cdot 10^t = 11 \dots 1 \cdot 2^t \cdot 5^t$$

Da $p \mid z_1 - z_2$ und $p \neq 2, 5$ muss p notwendigerweise die Repunit $\underbrace{11 \dots 1}_{s-t \text{ mal}}$ teilen, was aber einen Widerspruch zu eingangs getätigter Annahme darstellt.

- 2) Hier wird der Schubfachschluss in umgekehrter Weise verwendet. Dazu zuerst eine kurze Vorüberlegung:

Da je 5 weiße und je 5 schwarze Schuhpaare gibt braucht man auf jeden Fall mindestens 6 Schuhe gleicher Farbe, um ein vollständiges Paar zu erhalten.

Klassifiziert man nun die Schuhe nach ihrer Farbe, erhält man so zwei Schubfächer (für weiße und schwarze Schuhe) Damit ist $n = 2$ und notwendigerweise $a + 1 = 6$ die Mindestanzahl für ein Paar gleichfarbiger Schuhe.

Hat man also $11 = 5 \cdot 2 + 1$ Schuhe mitgenommen wird man auf Grund des Schubfachschlussprinzips mindestens 6 Schuhe gleicher Farbe bekommen und damit ein farblich passendes Paar erhalten.

- 3) Unterteilt man die Tischflächen rasterförmig in Quadrate der Seitenlänge 20 cm, so erhält man 25 Quadrate. Diese Quadrate sind nun unsere Schubfächer und also ist $n = 25$.

Da $151 = 6 \cdot 25 + 1$, muss es wegen dem Schubfachschlussprinzip mindestens ein Schubfach bzw. Quadrat geben, auf dem mindestens 7 Fliegen sitzen.

Es ist nur noch zu zeigen, dass das tapfere Schneiderlein mit seiner Fliegenklatsche tatsächlich ein Quadrat mit der Seitenlänge 20 cm überdecken kann.

Dies ergibt sich aber sofort aus der Tatsache, dass für die halbe Diagonalenlänge eines jeden solchen Quadrats stets gilt: $\frac{20\sqrt{2}}{2} < 15$

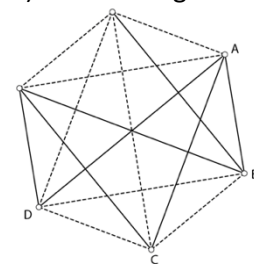
- 4) Sechs Personen, die einander kennen oder nicht kennen kann man durch ein Sechseck veranschaulichen, bei dem alle Punkte durch Strecken miteinander verbunden sind. Dabei veranschaulichen die Punkte die Personen und die Verbindungen den Bekanntheitsgrad, wenn man diese noch folgendermaßen einfärbt. Rot, wenn sich die Personen kennen und blau, wenn sich die Personen nicht kennen.

Von jedem Punkt gehen 5 Strecken aus. Wählt man nun die beiden Linienfarben als Schubfächer gilt wegen $5 = 2 \cdot 2 + 1$ für jeden Punkt des Sechsecks folgende Aussage:

Von jedem solchen Punkt müssen mindestens drei gleichfärbige (z.B. rote) Kanten ausgehen.

Daraus ergibt sich nun wie folgt die Behauptung des Ramsey Problems, denn es gibt im Wesentlichen nur zwei Möglichkeiten:

- a) BC, BD oder CD ist rot (\Rightarrow 3 Personen kennen sich) oder
- b) BC, BD **und** CD ist blau (\Rightarrow 3 Personen kennen sich nicht)



- 5) Durch die Bedingungen $1 \leq x \leq 20$ und $1 \leq y \leq 5$ wird ein Rechteck mit 100 möglichen Gitterpunkten beschrieben. Laut Angabe werden 47 davon markiert bzw. ausgewählt.

Zu jedem x gibt es eine Spalte bestehend aus fünf Punkten. Jede dieser 20 Spalten seien nun unsere Schubfächer.

Mit dem Schubfachschluss gibt es mindestens eine Spalte, in der mindestens drei markierte Punkte liegen ($47 = 2 \cdot 20 + 7$).

Wegen $1 \leq y \leq 5$ können wir nun drei Fälle unterscheiden:

- a) Diese Spalte enthält 5 Punkte.
- b) Diese Spalte enthält 4 Punkte.
- c) Diese Spalte enthält 3 Punkte.

Zu a): Wenn in der ersten Spalte 5 Gitterpunkte markiert wurden, gibt es noch 42 weitere Gitterpunkte die in den restlichen 19 Schubfächern bzw. Spalten markiert werden können.

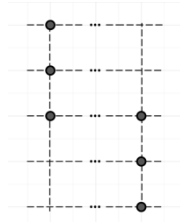
Demnach gibt es wegen $42 = 2 \cdot 19 + 4$ noch mindestens eine weitere Spalte in der sich mindestens drei markierte Punkte befinden müssen. Damit erhält man aber sicher immer ein Rechteck, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Zu b): Wenn in der ersten Spalte 4 Gitterpunkte markiert wurden, gibt es noch 43 weitere Gitterpunkte die in den restlichen 19 Spalten markiert werden können.

Demnach gibt es wieder wegen $43 = 2 \cdot 19 + 5$ noch mindestens eine weitere Spalte in der sich mindestens drei markierte Punkte befinden müssen. So erhält man auch wieder sicher immer ein Rechteck, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Zu c): Wenn in der ersten Spalte 3 Gitterpunkte markiert wurden, ist die Lage etwas kniffliger. Wegen $44 = 2 \cdot 19 + 5$ gibt es wieder mindestens eine Spalte mit mindestens drei markierten Punkten. Interessant ist dabei aber nur der Fall, dass auch hier nur genau 3 Punkte markiert sind. (Sind 4 oder 5 Punkte in dieser Spalte markiert, findet man unmittelbar wieder die Situationen von a) oder b) vor.)

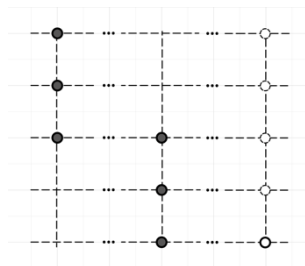
Bei 3 markierten Punkten ist es noch möglich, dass kein Rechteck entsteht (vgl. Abb.1).



Diese „Doppelzeile“ kann auch in der 1., 2., 4. oder 5. Zeile auftreten

Abb.1

In diesem Fall bleiben dann noch 41 Punkte für die restlichen 18 Spalten übrig und es muss nach dem Schubfachprinzip noch eine dritte Spalte mit mindestens drei markierten Punkten geben ($41 = 2 \cdot 18 + 5$). Bei drei oder mehr Punkten ergibt sich schließlich auch hier nun zwingend immer eine Rechteckskonstellation (vgl. Abb.2)



Wird in der letzten Spalte ein Punkt fix gewählt, entsteht bei jeder weiteren Positionierung von zwei zusätzlichen Punkten immer ein Rechteck, dessen Seiten zu den Koordinatenachsen parallel sind.

Abb.2

6) Seien $P_i = (x_{P_i}, y_{P_i})$ ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$)

Für den Mittelpunkt $M_{i,j}$ von je zwei dieser Punkte P_i und P_j gilt: $M_{i,j} = \left(\frac{x_{P_i} + x_{P_j}}{2}, \frac{y_{P_i} + y_{P_j}}{2} \right)$

Damit die Koordinaten von $M_{i,j}$ (positiv) ganzzahlig sind müssen x_{P_i} und x_{P_j} bzw. y_{P_i} und y_{P_j} die gleiche Parität besitzen. Dies liefert nun eine Möglichkeit zum Schubfachschluss:

(Unsere Schubfächer bestehen aus den ungeraden und geraden Zahlen.)

Von den fünf Zahlen $x_{P_1}, x_{P_2}, x_{P_3}, x_{P_4}, x_{P_5}$ gibt es mindestens drei mit derselben Parität.

Seien dies o. B. d. A. x_{P_1}, x_{P_2} und x_{P_3} .

Von den dazugehörigen Koordinaten y_{P_1}, y_{P_2} und y_{P_3} gibt es mindestens zwei mit derselben Parität.

Damit hat man stets mindestens zwei Punkte, bei denen sowohl die x - als auch die y - Koordinaten die gleiche Parität besitzen.